

FORMULARIUM VOOR ANALYTISCHE RUIMTEMEETKUNDE

1 VECTOREN

- $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ (formule van Chasles-Möbius)
- $\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A}$ (notatie met plaatsvectoren)
- componenten van vectoren : $co(\vec{P}) = (x, y, z) \Leftrightarrow \vec{P} = x.\vec{E}_1 + y.\vec{E}_2 + z.\vec{E}_3$

$$co(\vec{P} + \vec{Q}) = co(\vec{P}) + co(\vec{Q}) \quad \text{en} \quad co(k.\vec{P}) = k.co(\vec{P})$$

of

$$co(k.\vec{P} + l.\vec{Q}) = k.co(\vec{P}) + l.co(\vec{Q})$$

(lineariteit)

- M is het midden van het lijnstuk [AB] : $co(\vec{M}) = \frac{co(\vec{A}) + co(\vec{B})}{2}$
 $(x_M, y_M, z_M) = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$

- Z is het zwaartepunt van driehoek ABC : $co(\vec{Z}) = \frac{co(\vec{A}) + co(\vec{B}) + co(\vec{C})}{3}$
 $(x_Z, y_Z, z_Z) = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$

2 VERGELIJKINGEN VAN RECHTEN

P(x,y,z) is een willekeurig punt op de rechte door de punten P₁(x₁,y₁,z₁) en P₂(x₂,y₂,z₂) :

- Richtingsvector van de rechte P₁P₂ : de vector $\vec{P_1P_2}$
- Richtingsgetallen van de rechte P₁P₂ : (x₂-x₁, y₂-y₁, z₂-z₁)
- Vectoriële vergelijking : $\vec{P_1P} = k.\vec{P_1P_2}$ met $k \in \mathbb{R}$
of
 $\vec{P} = \vec{P_1} + k.(\vec{P_2} - \vec{P_1})$ met $k \in \mathbb{R}$

- Parametervergelijkingen :

$$\begin{cases} x = x_1 + k(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + k(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + k(z_2 - z_1) \end{cases} \quad \text{met } k \in \mathbb{R}$$

- Een stelsel cartesiaanse vergelijkingen :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

- Vergelijkingen van de coördinaatassen :

$$\begin{array}{l} \text{x-as : } \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \\ \text{y-as : } \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \\ \text{z-as : } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \end{array}$$

3 VERGELIJKINGEN VAN VLAKKEN

$P(x,y,z)$ is een willekeurig punt op het vlak α bepaald door de drie niet-collineaire punten $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$ en $P_3(x_3,y_3,z_3)$

- Richtingsvectoren van α : $\overrightarrow{P_1P_2}$ en $\overrightarrow{P_1P_3}$
- Richtingsgetallen van α : $(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$ en $(x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1)$

- Vectoriële vergelijking van α : $\overrightarrow{P_1P} = k \cdot \overrightarrow{P_1P_2} + l \cdot \overrightarrow{P_1P_3}$ met $k, l \in \mathbb{R}$

$$\text{of}$$

$$\overrightarrow{P} = \overrightarrow{P_1} + k \cdot (\overrightarrow{P_2} - \overrightarrow{P_1}) + l \cdot (\overrightarrow{P_3} - \overrightarrow{P_1}) \quad \text{met } k, l \in \mathbb{R}$$

- Parametervergelijkingen :

$$\begin{cases} x = x_1 + k(x_2 - x_1) + l(x_3 - x_1) \\ y = y_1 + k(y_2 - y_1) + l(y_3 - y_1) \\ z = z_1 + k(z_2 - z_1) + l(z_3 - z_1) \end{cases} \quad \text{met } k, l \in \mathbb{R}$$

- Determinantvergelijking :

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{of} \quad \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

- Het vlak door het punt $P(x_1, y_1, z_1)$ met normaalvector $\vec{N}(a, b, c)$:

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0 .$$

- Vergelijking van de coördinaatvlakken :

$$\text{xy-vlak : } z = 0$$

$$\text{xz-vlak : } y = 0$$

$$\text{yz-vlak : } x = 0$$

- Het vlak door de punten $(1,0,0)$, $(0,m,0)$ en $(0,0,n)$ (vergelijking op de assegmenten) :

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{m} + \frac{z}{n} = 1$$

4 EVENWIJDIGHEID

- Evenwijdige vectoren : $\vec{AB} // \vec{CD} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \vec{CD} = k \cdot \vec{AB}$

- Evenwijdige rechten :

de rechte l_1 met richtingsgetallen (a_1, b_1, c_1)

is evenwijdig met

de rechte l_2 met richtingsgetallen (a_2, b_2, c_2)

\Downarrow

$$\exists r \in \mathbb{R}_0 : a_2 = r a_1 \text{ en } b_2 = r b_1 \text{ en } c_2 = r c_1$$

$$\text{of als } a_2 \text{ en } b_2 \text{ en } c_2 \text{ verschillend zijn van nul : } l_1 // l_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

- Een rechte en een vlak :

de rechte l met richtingsgetallen (a_1, b_1, c_1)

is evenwijdig met

het vlak $\alpha : ux + vy + wz + t = 0$

\Downarrow

$$u a_1 + v b_1 + w c_1 = 0$$

- Twee vlakken :

het vlak $\alpha : u_1 x + v_1 y + w_1 z + t_1 = 0$

is evenwijdig met

het vlak $\beta : u_2 x + v_2 y + w_2 z + t_2 = 0$

\Downarrow

$$\exists r \in \mathbb{R}_0 : u_2 = r u_1 \text{ en } v_2 = r v_1 \text{ en } w_2 = r w_1$$

$$\text{of als } u_2 \text{ en } v_2 \text{ en } w_2 \text{ verschillend zijn van nul : } \alpha // \beta \Leftrightarrow \frac{u_1}{u_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{w_1}{w_2}$$

5 TWEE OPMERKINGEN

Opmerking 1

Als de rechte s de snijlijn is van de vlakken

$\alpha : u_1x + v_1y + w_1z + t_1 = 0$ en $\beta : u_2x + v_2y + w_2z + t_2 = 0$,
dan heeft s als richtingsgetallen

$$\left(k \cdot \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}, -k \cdot \begin{vmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \end{vmatrix}, k \cdot \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right) \text{ met } k \in \mathbb{R}_0$$

Opmerking 2

Als $\alpha : u_1x + v_1y + w_1z + t_1 = 0$ en $\beta : u_2x + v_2y + w_2z + t_2 = 0$
twee snijdende vlakken zijn,

dan bepalen ze een vlakkenwaaier met als vergelijking

$$k(u_1x + v_1y + w_1z + t_1) + l(u_2x + v_2y + w_2z + t_2) = 0 \text{ met } k, l \in \mathbb{R}$$

6 LENGTE EN AFSTAND – VERGELIJKING VAN EEN BOL

- De afstand van het punt $P(x_1, y_1, z_1)$ tot de oorsprong is de lengte (of norm) van de vector \overrightarrow{OP} en is de lengte van het lijnstuk $[OP]$:

$$d(0, P) = \left\| \overrightarrow{OP} \right\| = |OP| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

- De afstand van het punt $P_1(x_1, y_1, z_1)$ tot het punt $P_2(x_2, y_2, z_2)$ is de lengte (of norm) van de vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ en is de lengte van het lijnstuk $[P_1P_2]$:

$$d(P_1P_2) = \left\| \overrightarrow{P_1P_2} \right\| = |P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

- De afstand van het punt $P(x_1, y_1, z_1)$ tot het vlak $\alpha : ux + vy + wz + t = 0$:

$$d(P, \alpha) = \frac{|ux_1 + vy_1 + wz_1 + t|}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}$$

- De vergelijking van de bol met middelpunt $M(x_1, y_1, z_1)$ en straal r :

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = r^2$$

7 LOODRECHTE STAND

- Loodrechte stand van twee vectoren :

$$\begin{aligned} \vec{V}_1(a_1, b_1, c_1) &\perp \vec{V}_2(a_2, b_2, c_2) \\ &\Downarrow \\ \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 &= 0 \text{ (scalair product)} \\ &\Downarrow \\ a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 &= 0 \end{aligned}$$

- Loodrechte stand van twee rechten :

$$\begin{aligned} \text{de rechte } l_1 \text{ met richtingsgetallen } (a_1, b_1, c_1) \\ \text{staat loodrecht op} \\ \text{de rechte } l_2 \text{ met richtingsgetallen } (a_2, b_2, c_2) \\ &\Downarrow \\ a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 &= 0 \end{aligned}$$

- De vector $\vec{N}(u, v, w)$ is een normaalvector van het vlak $\alpha : ux + vy + wz + t = 0$

- Loodrechte stand van een rechte en een vlak :

$$\begin{aligned} \text{de rechte } l \text{ met richtingsgetallen } (a, b, c) \\ \text{staat loodrecht op} \\ \text{het vlak } \alpha : ux + vy + wz + t = 0 \\ &\Downarrow \\ \exists r \in \mathbb{R}_0 : a = ru \text{ en } b = rv \text{ en } c = rw \\ \text{of als } u \text{ en } v \text{ en } w \text{ verschillend zijn van nul : } l \perp \alpha &\Leftrightarrow \frac{a}{u} = \frac{b}{v} = \frac{c}{w} \end{aligned}$$

- Loodrechte stand van twee vlakken :

$$\begin{aligned} \text{het vlak } \alpha : u_1x + v_1y + w_1z + t_1 = 0 \\ \text{staat loodrecht op} \\ \text{het vlak } \beta : u_2x + v_2y + w_2z + t_2 = 0 \\ &\Downarrow \\ u_1u_2 + v_1v_2 + w_1w_2 &= 0 \end{aligned}$$

- Een stelsel cartesische vergelijkingen van de loodlijn uit $P(x_1, y_1, z_1)$ op het vlak $\alpha : ux + vy + wz + t = 0$:

$$\frac{x - x_1}{u} = \frac{y - y_1}{v} = \frac{z - z_1}{w}$$

(met u en v en w verschillend van nul)

- De vergelijking van het loodvlak door $P(x_1, y_1, z_1)$ op de rechte l met richtingsgetallen (a, b, c) :

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

8 HOEKEN

- De (niet-stompe) hoek θ tussen de vectoren $\vec{V}_1(a_1, b_1, c_1)$ en $\vec{V}_2(a_2, b_2, c_2)$ is gelijk aan de hoek tussen de rechte l_1 met richtingsgetallen (a_1, b_1, c_1) en de rechte l_2 met richtingsgetallen (a_2, b_2, c_2) en is bepaald door :

$$\cos \theta = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

- De hoek tussen de rechte l met richtingsgetallen (a, b, c) en het vlak $\alpha : ux + vy + wz + t = 0$ is het complement van de hoek θ tussen de richtingsvector $\vec{V}(a, b, c)$ van de rechte l en de normaalvector $\vec{N}(u, v, w)$ van het vlak α
- De hoek tussen de vlakken $\alpha : u_1x + v_1y + w_1z + t_1 = 0$ en $\beta : u_2x + v_2y + w_2z + t_2 = 0$ is de hoek tussen de normaalvectoren $\vec{N}_1(u_1, v_1, w_1)$ en $\vec{N}_2(u_2, v_2, w_2)$.